Teorema della funzione implicita

Teorema della funzione implicita

Teorema 1 (Teorema di Dini)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ che contiene l'origine $(0,0)$ e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\Omega)$ tale che*

$$F(0,0)=0 \qquad e \qquad \partial_x F(0,0)\neq 0.$$

Allora esistono due costanti $\varepsilon_0>0$, $\delta_0>0$ ed una funzione

$$\eta:[-\delta_0,\delta_0]\to\mathbb{R}$$

tali che:

(i) *$-\varepsilon_0<\eta(t)<\varepsilon_0$ per ogni $t\in[-\delta_0,\delta_0]$;*

(ii) *il grafico di η coincide con l'insieme di livello*

$$\mathcal{N}_F=\Big\{(x,y)\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[-\delta_0,\delta_0]\ :\ F(x,y)=0\Big\},$$

ovvero, per ogni $(x,y)\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[-\delta_0,\delta_0]$, vale che

$$F(x,y)=0 \quad \text{se e solo se} \quad x=\eta(y);$$

(iii) *η è continua su $[-\delta_0,\delta_0]$ e $\eta(0)=0$;*

(iv) *η è di classe C^1 su $(-\delta_0,\delta_0)$.*

Lemma 2 (Continuità di η)**.** *Sia $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che*

$$\eta:[-\delta_0,\delta_0]\to\mathbb{R}$$

sia una funzione con la proprietà seguente. Esiste $\varepsilon_0>0$ tale che:

(i) *$-\varepsilon_0\le\eta(t)\le\varepsilon_0$ per ogni $t\in[-\delta_0,\delta_0]$;*

(ii) *per ogni $(x,y)\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[-\delta_0,\delta_0]$, vale che*

$$F(x,y)=0 \quad \text{se e solo se} \quad x=\eta(y);$$

Allora, η è continua su $[-\delta_0,\delta_0]$.

Dimostrazione: Sia $y_n\in[-\delta_0,\delta_0]$ una successione convergente ad un certo $y_\infty\in[-\delta_0,\delta_0]$. Definiamo

$$x_n=\eta(y_n)$$

e supponiamo per assurdo che x_n non converge a $\eta(y_\infty)$. Esistono allora $c>0$ e una sottosuccessione x_{n_k} tali che

$$|x_{n_k}-\eta(y_\infty)|\ge c \quad \text{per ogni} \quad k>0.$$

Per la proprietà (i), la successione x_{n_k} è limitata e quindi esiste una sottosuccessione $x_{n_{k_j}}$ convergente ad un certo $x_\infty\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$. Siccome F è continua, abbiamo che

$$0=F(x_{n_{k_j}},y_{n_{k_j}})\to F(x_\infty,y_\infty),$$

e quindi

$$F(x_\infty,y_\infty)=0.$$

Ma allora, per (ii),

$$x_\infty=\eta(y_\infty).$$

□

Lemma 3 (Derivabilità di η)**.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che*

$$\eta : (a,b) \to \mathbb{R}$$

sia una funzione continua tale che

$$F\big(\eta(t),t\big) = costante \qquad per\ ogni \qquad t \in (a,b),$$

$$e \qquad \partial_x F\big(\eta(t),t\big) > 0 \qquad per\ ogni \qquad t \in (a,b).$$

Allora, η è derivabile su (a,b), la sua derivata è continua su (a,b) e

$$\eta'(t)\,\partial_x F\big(\eta(t),t\big) + \partial_y F\big(\eta(t),t\big) = 0 \qquad per\ ogni \qquad t \in (a,b).$$

Dimostrazione: Sia $t \in (a,b)$ e sia s abbastanza piccolo. Allora

$$\begin{aligned}
0 &= F\big(\eta(t+s),t+s\big) - F\big(\eta(t),t\big)\\
&= F\big(\eta(t+s),t+s\big) - F\big(\eta(t),t+s\big)\\
&\qquad + F\big(\eta(t),t+s\big) - F\big(\eta(t),t\big)\\
&= \Big(\eta(t+s) - \eta(t)\Big)\partial_x F\big(\kappa(t,s),t+s\big) + s\,\partial_y F\big(\eta(t),h(t,s)\big),
\end{aligned}$$

dove $\kappa(t,s)$ sta tra $\eta(t+s)$ e $\eta(t)$, e $h(t,s)$ è compreso tra $t+s$ e t. Dividento tutto per s abbiamo

$$\frac{\eta(t+s)-\eta(t)}{s} = -\frac{\partial_y F\big(\eta(t),h(t,s)\big)}{\partial_x F\big(\kappa(t,s),t+s\big)}.$$

Passando al limite per $s \to 0$, abbiamo la tesi. □

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Teorema 4 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano $F : \Omega \to \mathbb{R}$ e $G : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1(\Omega)$. Sia $\mathcal{N}_G$ l'insieme*

$$\mathcal{N}_G = \Big\{X \in \Omega :\ G(X) = 0\Big\}.$$

Se $X_0 \in \mathcal{N}_G$ è un punto di massimo (o minimo) relativo per la funzione F su $\mathcal{N}_G$, allora è vera una delle affermazioni seguenti :

(a) $\nabla G(X_0) = 0$*;*

(b) *esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla F(X_0) - \lambda \nabla G(X_0) = 0$.*

Dimostrazione in dimensione due. Sia $X_0 = (x_0,y_0)$. Supponiamo che $\nabla G(x_0,y_0) \neq 0$. Allora,

$$\partial_x G(x_0,y_0) \neq 0 \qquad \text{oppure} \qquad \partial_y G(x_0,y_0) \neq 0.$$

Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\partial_x G(x_0,y_0) \neq 0$. Per il teorema della funzione implicita, esistono $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ed una funzione

$$\eta : \big(y_0-\delta, y_0+\delta\big) \to \big(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\big),$$

tale che dato un punto

$$(x,y) \in \big(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\big) \times \big(y_0-\delta, y_0+\delta\big),$$

si ha che

$$G(x,y) = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x = \eta(y).$$

Ora, siccome $F : \mathcal{N}_G \to \mathbb{R}$ ha un minimo relativo in (x_0, y_0), abbiamo che la funzione

$$y \mapsto F\big(\eta(y), y\big)$$

ha un minimo relativo in y_0. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dy}\Big|_{y=y_0} F\big(\eta(y), y\big) &= \eta'(y_0)\, \partial_x F\big(\eta(y_0), y_0\big) + \partial_y F\big(\eta(y_0), y_0\big) \\ &= \eta'(y_0)\, \partial_x F\big(x_0, y_0\big) + \partial_y F\big(x_0, y_0\big) \\ &= -\frac{\partial_y G\big(x_0, y_0\big)}{\partial_x G\big(x_0, y_0\big)}\, \partial_x F\big(x_0, y_0\big) + \partial_y F\big(x_0, y_0\big). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Cerchiamo λ tale che

$$\begin{cases} \partial_x F(x_0, y_0) = \lambda\, \partial_x G(x_0, y_0) \\ \partial_y F(x_0, y_0) = \lambda\, \partial_y G(x_0, y_0). \end{cases}$$

Scegliamo

$$\lambda := \frac{\partial_x F(x_0, y_0)}{\partial_x G(x_0, y_0)}.$$

In questo modo, la prima uguaglianza è automaticamente soddisfatta; la seconda segue da $(*)$. $\square$

Esercizio 5. *Per ogni $a > 0$ ed ogni $b > 0$, consideriamo il rettangolo $\mathcal{R}_{ab} = [0, a] \times [0, b]$. Il perimetro e l'area di $\mathcal{R}_{ab}$ sono dati rispettivamente da*

$$\mathrm{Per}\,(\mathcal{R}_{ab}) = 2a + 2b \qquad e \qquad \mathrm{Area}\,(\mathcal{R}_{ab}) = ab\,.$$

Sia $P > 0$. Fra tutti i rettangoli di perimetro P trovare quello con area più grande.

Esercizio 6. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione F sull'insieme D.*

(1) $F(x, y) = x^3 - xy^2 - x + 1$; $\quad D = \big\{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 = 1\big\}$;

(2) $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$; $\quad D = \big\{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 = 1\big\}$;

(3) $F(x, y) = x^3 - y^3$; $\quad D = \big\{(x, y) \,:\, x^2 + 2y^2 = 1\big\}$;

(4) $F(x, y) = x^3 - xy^2$; $\quad D = \big\{(x, y) \,:\, 2x^2 + y^2 = 1\big\}$;

(5) $F(x, y) = xy$; $\quad D = \big\{(x, y) \,:\, x^2 + 2y^2 = 1\big\}$;

(6) $F(x, y) = x^2 + xy$; $\quad D = \big\{(x, y) \,:\, x^2 + 2y^2 = 1\big\}$;

(7) $F(x, y) = x^2 + xy$; $\quad D = \big\{(x, y) \,:\, x^2 + 2y^2 = 1\big\}$.

Esercizio 7. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione F sulla sfera*

$$\partial B_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}.$$

(1) $F(x, y, z) = x + y + z$;

(2) $F(x, y, z) = xyz$;

(3) $F(x, y, z) = xy + yz + zx$;

(4) $F(x, y, z) = xy$;

(5) $F(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.